NUMEROS REALES

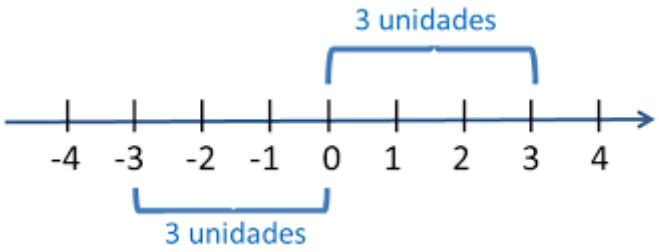
.- Valor Absoluto

Sea u un número real (u ϵ **R**). El valor absoluto de u se denota I u I y se define asi: Iu I = u si u ≥ 0 y I u I = -u , si u < 0 (-u se denomina opuesto de u)

El **I u I** es la medida del segmento 0u.

Por ejemplo:

I3I = 3 ; I -3I = - (-3) = 3 ; I -1/5 I = - (-1/5) = 1/5



Propiedades

1.- I u I ≥ 0 (Probar)

2.- Los **números opuestos** tienen **igual valor absoluto**.

|u| = |−u| (Probar)

Ejemplo

|5| = **5** |-5 |= **5** |0| = **0**

3.- - I u I ≤ u ≤ I u I

4.- I s – t I = I t – s I , donde s y t son números reales (Probar)

5.- Sea r un numero positivo (r > 0) , I u I < r si y solo si - r < u < r

6.- Sea r > o y c ϵ R , I x – c I < r si y solo si c – r < x < c + r

7.- Sea r > o y c ϵ R , I x – c I > r si y solo si x < c – r v x > c + r

8.- El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos.

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

Ejemplo:

$|5 + (-2)| \leq |5| + |(-2)|$

$|3| \leq |5| + |2|$

$3 \leq 7$

9.- El valor absoluto de un producto **es igual al producto de los valores absolutos de los factores**.

$$|u \cdot v| = |u| \cdot |v|$$

Ejemplo:

$|5 \cdot (-2)| = |5| \cdot |(-2)|$

$|-10| = |5| \cdot |2|$

$10 = 10$

.- Distancia

La **distancia** entre **dos números reales** s y t, y se denota **d(s,t)**, al número real positivo dado por la siguiente igualdad:

$$d(s,t) = |t - s|$$

Por propiedad 2, $I\ t - s\ I = I\ s - t\ I = d(t,s)$
O sea : $d(s,t) = d(t,s)$

Ejemplo:

La **distancia** entre −5 y 4 es:
$d(-5, 4) = |4 - (-5)| = |4 + 5| =$ **$|9|$**

.- Los símbolos Suma y Producto

Sean x_1 , x_2 , … , x_n números reales cualesquiera.

Consideremos los números $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ $x_1 . x_2 .. \ldots . x_n$

Para abreviar estos dos números emplearemos los símbolos $\sum$ π

Que se denominan suma y producto respectivamente

Los números 1 , 2 ,…,n se denominan índices.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

De igual manera se simboliza el del producto.

.- Conjunto de puntos de la recta

Intervalos acotados

Sean a y b números reales tales que a b. Cada uno de los conjuntos [a , b] , (a , b) , [a , b) , (a , b] se denominan intervalos acotados de extremos a y b.(izquierdo a y b derecho)

[a , b] = { x / x ϵ R y a ≤ x ≤ b} Intervalo cerrado (contiene los expremos)

(a , b) = { x / x ϵ R y a < x< b } Intervalo Abierto (no contiene a ninguno de los extremos)

[a , b) = { x / x ϵ R y a ≤ x < b } Intervalo semiabierto (incluye uno de los extremos)

(a , b] = { x / x ϵ R y a < x ≤ b } Intervalo semiabierto (incluye uno de los extremos)

La amplitud de cualquiera de estos intervalos es el número no negativo

$$d(a, b) = |b - a|$$

Intervalos no acotados

Los símbolos $+\infty$, $-\infty$ no representan números, sino que son símbolos que nos sirven para indicar algo "muy grande" positivo o negativo.

Cada uno de los conjuntos que se denotan $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$ se denominan **intervalos no acotados**.

$[a, +\infty) = \{x \in R, x \geq a\}$ (Dibujar)

$(a, +\infty) = \{x / x \in R , x > a\}$ (Dibujar)

$(-\infty, b] = \{x / x \in R , x \leq b\}$ (Dibujar)

$(-\infty, b) = \{x / x \in R , x < b\}$ (Dibujar)

Entorno

Sea $c \in \mathbb{R}$, que se denomina centro y $r > 0$ llamado radio.

- El intervalo $(c-r, c+r)$ se denomina **entorno de centro c y radio r**, se denota $E(c,r)$ o $E(c)$

  $E(c , r) = \{ x / x \in \mathbb{R} \text{ y } |x - c| < r \}$ Dibujar

- El Conjunto $(c - r , c + r) - \{ c \}$, se denomina **entorno reducido de c** , se representa $E'(c)$ o $E'(c , r)$

  $E'(c , r) = \{ x / x \in \mathbb{R} \text{ y } 0 < |x - c| < r \}$ Dibujar

  O sea $E'(c , r) = E(c , r) - \{ c \}$

Sea $p \in R^+$, $(p \neq 0)$

- El intervalo $(p , +\infty)$, se denomina $E(+\infty , p)$ o $E(+\infty)$ (entorno de más infinito)
  Análogamente el intervalo $(-\infty , p)$ se denomina entorno de menos infinito

- El intervalo (p , + ∞) se denomina E´(+ ∞ , p) o E´(+ ∞) Dibujar

- El intervalo (- ∞ , p) se denomina E´(- ∞) Dibujar

Punto Interior

Sea I un intervalo acotado o no.

Un punto x es un pinto interior de I si y solo si existe un r > 0 tal que E(x,r) esta incluido en I.

I^0 designa al conjunto de los puntos interiores..

.- Cota Superior. Elemento Maximo- Supremo

- Un número real c es cota superior de un conjunto A de números reales o bien el conjunto A esta **acotado superiormente** por **c si** para cada x **perteneciente a A (x ϵ A) se verifica x ≤ c.**
  Si c] es cota superior de A y c < c´, entonces c´ es otra cota superior de A. (Dibujar)

- **Un número real M es elemento máximo de un conjunto A de números reales si se verifican:**
  1.- M es cota superior de A
  2.- M ϵ A **(Dibujar)**

  Propiedad: Dos números distintos no pueden ser elementos máximos de un mismo conjunto de números reales.
  Esta propiedad expresa que si existe elemento máximo para un conjunto de números reales, este es único.

- **Un numero real S es el supremo de un conjunto A si se verifican:**

  1.- A esta acotado superiormente por S
  2.- No hay cotas superiores de A menores que S. Dibujar

Propiedad: Dos números distintos no pueden ser supremo de un mismo conjunto de números reales. Si existe supremo para un conjunto de números reales, este es unico.

Idénticas consideraciones se hacen para cota superior, elemento mínimo e ínfimo

Axioma de Completitud

Todo conjunto de números reales, acotado superiormente, admite supremo (Idem para el ínfimo).